BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 *Linear Programming* (Program Linear)

Menurut Tjuju (1999) program linear adalah suatu cara untuk menyelesaikan pengalokasian sumber-sumber yang terbatas diantara beberapa aktivitas yang bersaing dengan cara yang terbaik yang mungkin dilakukan. Program linear merupakan perencanaan aktivitas-aktivitas untuk memperoleh suatu hasil yang optimum, yaitu suatu hasil yang mencapai tujuan terbaik di antara seluruh alternatif yang fisibel.

Ada beberapa karakteristik yang bisa digunakan dalam persoalan program linear, yaitu:

a. Variabel Keputusan

Variabel keputusan adalah variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan-keputusan yang akan dibuat.

b. Fungsi Tujuan

Fungsi tujuan merupakan fungsi dari variabel keputusan yang akan dimaksimumkan (keuntungan) dan meminimumkan (biaya).

c. Pembatas

Pembatas merupakan kendala yang dihadapi sehingga kita tidak bisa menentukan harga-harga dari variabel keputusan sembarang.

d. Pembatas Tanda

Pembatas tanda adalah pembatas yang menjelaskan apakah variabel keputusan diasumsikan hanya berharga nonnegatif atau variabel keputusan tersebut boleh berharga positif, boleh juga negatif (tidak terbatas dalam tanda).

2.2 Model Program Linear

Membuat formulasi model program linear terdapat tiga langkah utama yang harus dilakukan, yaitu:

a. Menentukan variabel keputusan atau variabel yang ingin diketahui dan gambarkan dengan simbol matematik.
b. Menentukan tujuan dari variabel keputusan yang dapat berbentuk maksimum atau minimum.
c. Menentukan kendala dari variabel keputusan.

Bentuk umum model pemrograman linear sebagai berikut :

Fungsi tujuan : Maks/Min

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{2.1}$$

Fungsi Kendala/Sumber daya yang membatasi

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq)\ b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq)\ b_2 \\ &\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq)\ b_m \\ &x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

dengan

Z	:	Fungsi tujuan (*Objective function*)
$x_1, x_2, \dots, x_n$	:	Variabel keputusan
$c_1, c_2, \dots, c_n$	:	Kontribusi masing-masing variabel terhadap tujuan
$a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}$	:	Penggunaan perunit variabel keputusan akan sumber daya yang membatasi
$b_1, b_2, \dots, b_m$	:	Jumlah tiap sumber daya yang tersedia
$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$	:	Pembatas nonnegatif

Pengubahan suatu bentuk model matematika bentuk umum kebentuk standar dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

1. Menambahkan variabel *slack* pada kendala yang bertanda $(\leq)$.

2. Menambahkan variabel *surplus* bernilai negatif dan *artifisial* bernilai positif pada kendala yang bertanda $(\geq)$.
3. Menambahkan variabel *artifisial* pada kendala yang bertanda $(=)$.

2.3 Algoritma Titik Interior

Algoritma titik interior digunakan untuk menyelesaikan masalah program linear yang kompleks, yaitu yang memiliki fungsi kendala dan variabel keputusan yang jumlahnya besar.

Definisi 2.1 (Lianah, 2008) Matriks diagonal merupakan suatu matriks bujur sangkar yang semua elemen diluar elemen diagonal utama bernilai nol, dan paling tidak satu elemen pada diagonal utamanya tidak sama dengan nol. Jadi matriks $n \times n$ secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Contoh 2.1:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2 (Klain, 2010) Misalkan P adalah matriks proyeksi jika dan hanya jika P adalah simetris dan idempotent.

Contoh 2.2:

Diberikan matriks proyeksi $Q \subset W$ dengan vektor $\left(0, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$ dan $(3, 3, 3)$.

Tentukan matrik proyeksi $Q \subset W$?

Penyelesaian:

Diketahui : $Q \subset W$

vektor $\left(0, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$ dan $(3, 3, 3)$.

Ditanya : matriks proyeksi dari vektor $(0, 2, 5, -1)$.

Jawab:

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{6} & 3 \\ -\frac{1}{6} & 3 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & 27 \end{bmatrix} \qquad (AA^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks proyeksi Q sebagai berikut:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Algoritma Titik Interior yang dikemukakan oleh Narendra Karmarkar (1984) merupakan suatu metode mengoptimalkan fungsi objektif $Z = c^T x$ dengan kendala $Ax = b$ dan $x \geq 0$. Penyelesaian Algoritma Titik Interior untuk kasus minimisasi dapat diselesaikan dengan cara membawa masalah minimisasi ke masalah maksimisasi, yaitu dengan menegatifkan fungsi tujuan masalah minimisasi, dengan langkah-langkah menyelesaikan algoritma titik interior sebagai berikut:

1. Mengubah bentuk umum yang minimum ke bentuk maksimum dengan menambahkan variabel *slack* pada fungsi kendala. sehingga:

   Bentuk umum program linear:

   $Min\ z = cx$

   Dengan kendala:

   $Ax \geq b$

   $x \geq 0$

   dimana:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m\times n} \end{bmatrix}$$

menjadi:

$$Mak\ \ z = -(cx)$$

Dengan kendala :

$$[A, I]\begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} = b, \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} \geq 0$$

2. Memilih titik interior

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \tag{2.3}$$

dengan x merupakan variabel keputusan.

Kemudian tentukan matriks diagonal *D* sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

3. Menentuka koefisien baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan

$$\tilde{A} = AD \text{ dan } \tilde{C} = DC \tag{2.4}$$

dengan:

A : Koefisien dari fungsi kendala

$\tilde{A}$: Koefisien baru dari fungsi kendala

D : Matriks diagonal dari titik interior

C : Koefisien dari fungsi tujuan

$\tilde{C}$: Koefisien baru dari fungsi tujuan

4. Menentukan matriks proyeksi

$$P = I - \widetilde{A^T}(\tilde{A}\,\widetilde{A^T})^{-1}\tilde{A} \tag{2.5}$$

dengan:

P : Matriks Proyeksi

I : Matriks identitas

5. Menentukan *projected gradient*

$$c_p = P\tilde{C} \text{ dan } v = |c_p| \tag{2.6}$$

dengan :

c_p : Tingkat kemiringan yang diproyeksikan

P : Matriks proyeksi

v : Nilai absolut dari komponen negatif c_p

6. Menentukan dengan iterasi koordinat titik baru

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{v} c_p \tag{2.7}$$

dengan α merupakan konstanta yang dipilih antara 0 dan 1 dengan $0 < \alpha < 1$

7. Menghitung X sebagai penyelesaian percobaan untuk iterasi berikutnya (langkah 1).

$$X = D\tilde{x} \text{ dan } z = C^T X \tag{2.8}$$

Proses iterasi akan terhenti apabila penyelesaian iterasi ini tidak berubah dari yang sebelumnya.